Cebir II Final Soruları

1- 10 a) R bir halka, $f: R \longrightarrow R$ halka homomorfizması olsun. $A=\{x\in R \mid f(x)=x\}$ ise A, R'nin althalkası mıdır? Araştırınız.

10 b) R bir halka, I, R'nin bir ideali olsun. $\forall a,b\in R$ için $ab-ba\in I$ ise R/I bölüm halkası değişmelidir, gösteriniz.

2- 20 R birimli bir halka I, R'nin kendinden farklı bir ideali olsun. I'nın maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart R/I bölüm halkasının bölme halkası olmasıdır, gösteriniz.

3 a) 10 $(\mathbb{Z}_{36},+,\cdot)$ halkasının tüm ideallerini bulunuz. Ayrıca varsa maksimal ideallerini belirleyiniz.

b) 10 $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Nilpotent ve idempotent elemanların homomorfik görüntülerinin de nilpotent ve idempotent olduklarını gösteriniz.

4- a) 10 $11+41i\in\mathbb{Z}[i]$ Gauss tam sayısını asal çarpanlarına ayırınız.

b) 10 $2-7i$ ve $2+11i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenlerini Öklid Algoritması yoluyla bulunuz.

5- a) 10 $f(x)=11x^4-44x^3+91x^2-109x+61\in\mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır?

b) 10 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+\bar{1}\in\mathbb{Z}_2[x]$ polinomu için $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ Bölüm halkası tamlık bölgesi midir? Araştırınız.

Sorular eşit puanlıdır.

— Cevap Anahtarı —

1- a) $A = \{x \in R \mid f(x) = x\}$ ise $f(0_R) = 0_R$ olup
$0_R \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$
$\forall x, y \in A$ ise $f(x) = x$, $f(y) = y$ dir.

$f(x-y) = f(x) - f(y) = x - y$ olup $x-y \in A$
$f(x \cdot y) = f(x) f(y) = x \cdot y$ " $x \cdot y \in A$

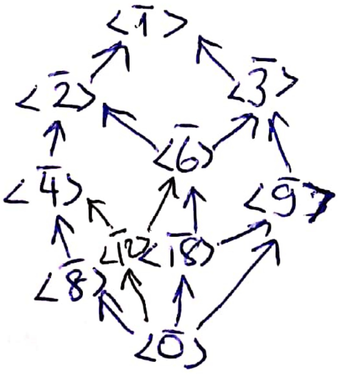
A, R'nin althalkasıdır.

b) $\forall a, b \in R$ için $ab - ba \in I$ ise
$ab \equiv ba \pmod{I}$ olup $ab + I = ba + I \Rightarrow$
$(a+I)(b+I) = (b+I)(a+I)$ elde edilir.

2- $(\Rightarrow)$ I maksimal ideal olsun. $R/I \neq 0$ dır.
$\forall x \in R \setminus I$ için $x + I$ elemanının terslenebilir olduğunu göstermeliyiz. $I + (x) = R$
$\Rightarrow$ $m + ax = 1_R$, $\exists a \in R$ var $m = 1_R - ax$ ve
$(a+I)(x+I) = 1_R + I$ olup $(x+I)^{-1} = a + I$ olur.

$(\Leftarrow)$ R/I bölme halkası olsun. $\forall x + I \in R/I$ için $(x+I)(a+I) = 1_R + I$, olacak şekilde $a + I \in R/I$ var. $a \in R$ olup $ax + I = 1_R + I$
$\Rightarrow$ $I \subset (I, x) = R$ olup $I + (x) = R$, I maksimaldir.

3- a) $\mathbb{Z}_{36}$ halkasının idealleri
$\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{9} \rangle, \langle \overline{12} \rangle, \langle \overline{18} \rangle, \langle \bar{1} \rangle$



$\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ idealleri maksimaldir.

3-b) $x \in R$ nilpotent ise $x^n = 0_R$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$

$f(x)^n = f(x) \cdots f(x) = f(x^n) = f(0_R) = 0_R$

$x \in R$ idempotent ise $x^2 = x$

$f(x)^2 = f(x) f(x) = f(x^2) = f(x)$

4- a) $11 + 41i = (1+i)(4+i)(7+2i)$

b) $2 + 11i = (-1+i)(2-7i) - 3 + 2i$

$2 - 7i = (-2+i)(-3+2i) - 2$

$-3 + 2i = (1-i).(-2) - 1$ olup

$(11i+2, 2-7i) = 1$ dir.

5- a) $f(x) = 11x^4 - 44x^3 + 81x^2 - 109x + 61$

$f(x+1) = 11x^4 + 25x^2 - 15x + 10$ olup $n=5$ asalı

için $5 \mid 10, -15, 25$, $5 \nmid 11$ ve $25 \nmid 10$ olup

asaldır.

b) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ olup

$f(x) = (x+1)(x^2+x+1)^2$ olup asal değil

dolayısıyla $\mathbb{Z}_2[x] / (f(x))$ T.B değildir.